非平衡系の熱力学的極限 : Extensive Property,ゆらぎ,非線型応答(非線型非平衡統計力学研究会報告,基研研究会報告)

鈴木, 増雄

非平衡系の熱力学的極限
— Extensive Property, ゆらぎ, 非線型応答 —

東大・理　　鈴 木 増 雄

最近，久保[1),2)]によって提唱された巨視変数の extensive property に関する次の Ansatz を一般の場合 (Non-Markoffian) に拡張して，証明できたので報告する。Kubo の Ansatz とは，時刻 t における巨視変数 X の分布関数 $P(X,t)$ は，系の体積 Ω が大きいとき， $x = X/\Omega$ として，

$$P(X,t) = C \exp\left[\Omega \phi(x,t)\right] \tag{1}$$

という漸近的な形をとることを主張するものである。ここでは，簡単のために，次のようなマスター方程式で記述される系

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\sigma_j\};t) = \Gamma P(\{\sigma_j\};t) \tag{2}$$

(但し，Γ は時間発展演算子，$\{\sigma_j\}$ は微視的な配位を表わすパラメータ；$\sigma_j = \pm 1$) と次のような Liouville 方程式で表わされる量子系を考える：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = [\mathscr{H}, \rho(t)] \;;\; \hbar = 1。 \tag{3}$$

巨視変数 X に対する分布関数 $P(X,t)$ 又は $\rho(X,t)$ は次式で定義される：

$$P(X,t) = \sum_{\{\sigma_j = \pm\}} \delta(\boldsymbol{X} - X)\, P(\{\sigma_j\};t),$$
$$\rho(X,t) = \mathrm{Tr}\; \delta(\boldsymbol{X} - X)\, \rho(t) \tag{4}$$

この巨視変数 X に対応する次の母関数を導入すると便利である：

$$\Psi(\lambda,t) = \begin{cases} \mathrm{Tr}\; e^{\lambda \boldsymbol{X}} \rho(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{quantal}) \\ \sum_{\{\sigma_j=\pm\}} e^{\lambda \boldsymbol{X}} P(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{stochastic ot classical}). \end{cases} \tag{5}$$

分布関数 $\rho(X,t)$ と $\Psi(\lambda,t)$ は，次の関係にある：

$$\rho(X,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-\lambda X}\,\Omega(\lambda,t)\,d\lambda\,。 \tag{6}$$

従って，$\Psi(\lambda,t)$ が $\Psi(\lambda,t)=C_1\ \exp\left[\Omega\,\phi(\lambda,t)\right]$ という extensive propertyを持てば鞍点法により，

$$\rho(X,t) = C_2\exp\left[\Omega\left\{\psi(\lambda_0,t)-\lambda_0\,x\right\}\right] \tag{7}$$

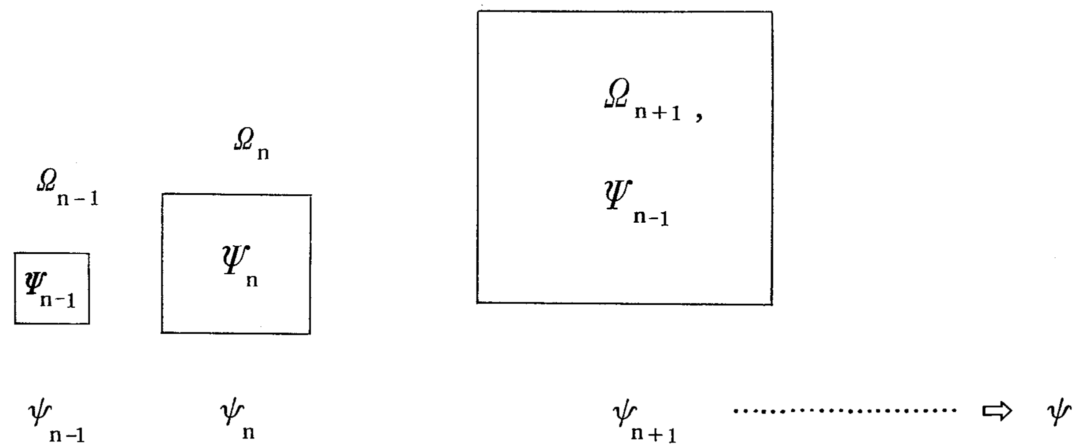
となり $\rho(X,t)$ も extensive property を持つことになる。但し，λ_0 は次式で決まる鞍点である：

$$\partial\psi(\lambda,t)\,/\,\partial\lambda = x\,. \tag{8}$$

以下において，初期分布は $\rho(0)=\exp\mathcal{H}^{(i)}$ の形で表わされるものとする。多くの物理系で充されていることであるが，$\mathbf{X}$, $\mathcal{H}^{(i)}$, $\mathcal{H}$ は，"局所演算子" の和で表わされるものとする：

$$\mathbf{X}=\int\mathbf{X}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r},\quad \mathcal{H}^{(i)}=\int^{(i)}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r},\quad \mathcal{H}=\int\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}. \tag{9}$$

但し，"局所演算子" とは，中心 $\boldsymbol{r}$ のまわりの半径 b（有限）の中の場の演算子のみの汎関数演算子のことである。このとき，図のように一辺の長さ $L_n=2^n\times$（単位長さ）の d 次元立方体の列を考える（$n=1,2,3,\cdots\cdots$）。長さ L_n の体積に対応する母関数を Ω_n とし，それから作られる関数 $\psi_n=\Omega_n^{-1}\log\Psi_n$ の関数列を考える（$\Omega_n\propto L_n^d$）。



この関数列にコーシーの収束条件を適用して，すなわち，$n>n_0$ に対して，$|\psi_{n+m}(\lambda,t)-\psi_n(\lambda,t)|<\varepsilon$ (for $\varepsilon>0$ and for any positie integer m) を導くことに

より，次の定理が証明できる。[3) 4) 5) 6)]

定理 I (quantal)：局所演算子が適当な期待値の意味で有界ならば，$\psi_n(\lambda,t)$ は $n\to\infty$ $(\Omega\to\infty)$ のとき一様収束して，その極限値 $\psi(\lambda,t)$ が存在する。但し，時間 t は有限に固定しておく。こうして，$\Psi(\lambda,t)$ は extensiie property を持ち，$\rho(X,t)$ も(7)の性質を示す。

同様に，(2)で記述される確率過程に対しては，もっと条件が具体的になり，次の定理が証明される。分布関数が，

$$P(\cdots\cdots,\ -\sigma_j,\ \cdots\cdots,t)\ \leq C_3\, P(\cdots\cdots,\ \sigma_j,\ \cdots\cdots,\ t), \tag{10}$$

の性質を持つ（C_3 は Ω に依存しない）とき，P は "normal" であると呼ぶことにすると，

定理 II (stochastic)：Γ を $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ と任意に分割したとき，$P(t')\equiv\exp[t'(\Gamma_1+\mu\Gamma_2)]\exp\mathscr{A}^{(i)}$ が $0\leq t'\leq t$, $0\leq\mu\leq 1$ に対して，normal ならば，

$$\lim_{\Omega\to\infty}\psi_\Omega(\lambda,t)=\psi(\lambda,t)=\text{存在（一様収束）}, \tag{11}$$

である。但し，t も λ も有限とする。故に，$\Psi(\lambda,t)$ と $P(X,t)$ は extensive property を示す。

次に，こうして，存在の証明された関数 $\psi(\lambda,t)$ がわかっているとして，非線型緩和とゆらぎの問題を考察する。まず Kubo[1] にならって $x=y(t)+z$ とおき，$\phi(x,t)\equiv\psi(\lambda,t)-\lambda x$ を z で展開して，その一次の項を零にする（local minimum）ことによって，次の結果が得られる：

定理 IIIa ：大きな Ω に対して，

$$y(t)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}=\langle x\rangle_t\ ;\ \langle \mathbf{X}\rangle_t=\int X\rho(X,t)\,dX=\mathrm{Tr}\,\mathbf{X}\rho(t) \tag{12}$$

さらに，z^2 の項を調べることによって，x の $y(t)$ のまわりの分数 $\sigma(t)$ は，次のように与えられる。

定理 IIIb ：大きな Ω に対して，

$$\sigma(t)=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right)_{\lambda=0}=\Omega^{-1}\langle(\mathbf{X}-\langle\mathbf{X}\rangle_t)^2\rangle_t=\Omega\langle(x-\langle x\rangle_t)^2\rangle_t \tag{13}$$

その他，z^n までの係数と，n次のキュムラント（ゆらぎ）との関係，非線型応答の表式等が得られているが，これらについては，文末の文献を参照して欲しい。$\mathcal{H}$が時間に依存する一般の場合にも，上の結果は拡張できることが，わかっている。また，厳密に解けるモデルでの具体的な結果については文献 5)と 7) を，一次元超伝導体での super-current のゆらぎについては，文献 8)を参照して下さい。

参 考 文 献

1) R. Kubo, in Synergetics (Proc. Symp. Synergetics, 1972, Schloss Elmau), ed. H. Haken (B. G. Teubner, Stuttgart) (1973).
2) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973) 51.
3) M. Suzuki, Phys. Letters **50A** (1974) 47.
4) M. Suzuki, プログレスに投稿中。
5) M. Suzuki, 基研，数理研主催の ISMPTP 国際会議（1975年1月 23日～ 29日）の予稿。
6) 物性研究「統計力学における数学的問題」研究会報告。
7) M. Suzuki, to be submitted to Progress. T. P.
8) N. Ōhata and M. Suzuki, preprint.

非平衡系におけるスピンコヒーレント表

柴田文明，高橋慶紀

量子力学的な演算子を，c-数の関数に射影して，演算子の方程式の代わりに，c-数の方程式を考える方法[1]は，レーザー系の量子統計力学的な記述に広く用いられている。スピン系に対しても，Schwinger の方法を用いて，コヒーレント表示[2]を導入し，演算子の方程式と同値な c-数の方程式を得ることができる。この表示をスピン緩和の現象に応用すれば，classical limit をとることによって，Kubo-Hashitsume[3]が現